TD n° 2 – Géométrie hyperbolique élémentaire (suite)

Encore un peu de plan hyperbolique

Exercice 1. *Flot géodésique*

On définit le *fibré tangent unitaire* au plan hyperbolique par

$$T^1\mathbb{H}^2 = \{(z,w) : z \in \mathbb{H}^2, v \in T_z\mathbb{H}^2,\ \|v\|_z = 1\}.$$

Le *flot géodésique* est un groupe à un paramètre $a_t : T^1\mathbb{H}^2 \to T^1\mathbb{H}^2$, pour $t \in \mathbb{R}$, de sorte que pour tout $(z,v) \in T^1\mathbb{H}^2$,

$$a_t(z,v) = (\gamma(t), \gamma'(t))$$

soit l'unique géodésique paramétrée par la longueur d'arc telle que $\gamma(0) = z$, $\gamma'(0) = v$.

1. Montrer que $T^1\mathbb{H}^2 \simeq \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$. On pourra utiliser la *décomposition d'Iwasawa* : toute matrice $g \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ peut s'écrire comme un unique produit de matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{y} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{y}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

avec $x \in \mathbb{R}$, $y \in (0,\infty)$, et $\theta \in [0,2\pi)$, et le fait que pour tout $z \in \mathbb{H}^2$, il existe $g \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ tel que $g \cdot z = \mathrm{i}$.

2. Montrer que le flot géodésique est donné par l'action à droite du sous-groupe à un paramètre

$$\left\{ a_t = \begin{pmatrix} e^{t/2} & \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Indice : on pourra commencer par étudier le cas de $(\mathrm{i},\mathrm{i}) \in T^1\mathbb{H}^2$.

Solution.

1. On rappelle que pour tout $z \in \mathbb{H}^2$, $T_z\mathbb{H}^2 \simeq \mathbb{C}$, donc $T^1\mathbb{H}^2$ s'identifie à un sous-ensemble de $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{C}$. $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ agit sur $\mathbb{H}^2$ par transformation de Möbius, et sur $T_z\mathbb{H}^2 \simeq \mathbb{C}$ par dérivée de la même transformation :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot v = d_z \left(\frac{az+b}{cz+d} \right) v = \frac{v}{(cz+d)^2}.$$

Soit $z \in \mathbb{H}^2$, on sait qu'il existe $g \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ tel que $g \cdot z = \mathrm{i}$. On utilise la décomposition d'Iwasawa de g^{-1}, et on fait agir g^{-1} sur $(\mathrm{i},\mathrm{i}) \in T^1\mathbb{H}^2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{y} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{y}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} (\mathrm{i},\mathrm{i}) = \left(x + \mathrm{i}y, ye^{2\mathrm{i}\theta}\mathrm{i} \right).$$

Or par construction ici, $z = x + \mathrm{i}y$ donc on obtient une application

$$g = g(x,y,\theta) \mapsto (z,w)$$

qui est clairement un homéomorphisme entre $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ et $T^1\mathbb{H}^2$.

2. La géodésique $t \mapsto a_t(\mathrm{i},\mathrm{i})$ est donnée par $(\gamma(t), \gamma'(t))$ pour γ l'unique géodésique paramétrée par la longueur d'arc passant par i en $t = 0$ et de vecteur tangent i à $t = 0$. On voit que, par construction, il s'agit de la droite verticale passant par i. Reste à choisir son paramétrage : pour $s > 1$, on a $d(\mathrm{i}, \mathrm{i}s) = \log(s)$, donc
$$a_t(\mathrm{i},\mathrm{i}) = (e^t\mathrm{i}, e^t\mathrm{i}) = \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix} (\mathrm{i},\mathrm{i}).$$
Ensuite, pour tout $(z, v) \in T^1\mathbb{H}^2$, soit $g \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ tel que $g \cdot (\mathrm{i},\mathrm{i}) = (z, v)$, il vient que
$$a_t(z, v) = a_t(g \cdot (\mathrm{i},\mathrm{i})) = g \cdot \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix} (\mathrm{i},\mathrm{i}).$$
On conclut par la question 1.

Exercice 2. *Formule de Gauss–Bonnet*

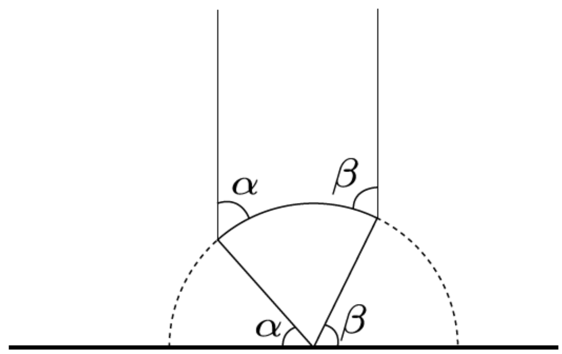

FIGURE 1 – Un triangle hyperbolique de sommet ∞.

1. Soit T un triangle hyperbolique dont un des sommets est dans $\partial\mathbb{H}^2 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ comme dans la figure 1 ci-dessus. En utilisant le fait que les angles euclidiens et les angles hyperboliques coïncident dans le demi-plan supérieur, montrer que l'aire de T est égale à $\pi - \alpha - \beta$.
2. Montrer que tout triangle hyperbolique peut s'écrire comme la différence entre deux tels triangles. En déduire la *formule de Gauss–Bonnet* : pour un triangle hyperbolique quelconque, son aire vérifie $\pi - \alpha - \beta - \gamma$.
3. En déduire la formule de l'aire d'un triangle idéal (c'est-à-dire dont les trois sommets sont dans $\partial\mathbb{H}^2$), ainsi que l'aire d'un polygone hyperbolique d'angles $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Solution.

1. Tout d'abord, remarquons que l'angle au niveau du point à l'infini est nul car les deux sommets sont parallèles (un autre moyen de voir cela est de se placer dans le disque hyperbolique : le sommet est sur le cercle unité, et les bords adjacents sont deux géodésiques chacune orthogonale au cercle unité, donc qui forment un angle nul). Par isométrie, on peut supposer que les deux sommets qui ne sont pas à l'infini se situent sur le cercle unité. En utilisant alors la trigonométrie euclidienne dans le disque unité, par report des angles comme sur la figure 1, on obtient
$$\mathrm{Aire}(T) = \int_{\cos(\pi-\alpha)}^{\cos(\beta)} \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \frac{dxdy}{y^2} = \pi - \alpha - \beta.$$

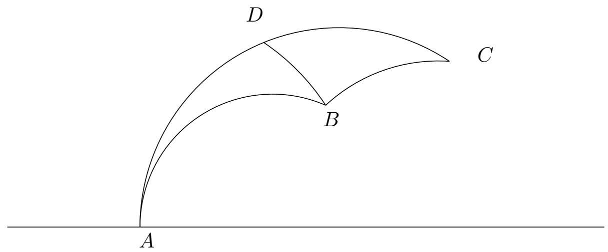

FIGURE 2 – Un triangle générique comme différence de deux triangles à un sommet sur $\mathbb{R}$

2. Toujours par isométrie, on peut supposer que le point à l'infini est non plus en $\{\infty\}$ mais sur $\mathbb{R}$. Le triangle quelconque BCD (cf. figure 2) s'écrit bien comme différence entre le triangle ABC et le triangle ABD.

   Si l'on note $\beta_1 = \widehat{DBC}$, $\beta_2 = \widehat{ABD}$, $\gamma = \widehat{BCD}$, $\delta_1 = \widehat{BDC}$ et $\delta_2 = \widehat{BDA}$, on a d'après la question 1
$$\text{Aire}(ABD) = \pi - \beta_2 - \delta_2, \quad \text{Aire}(ABC) = \pi - (\beta_1 + \beta_2) - \gamma.$$
   De plus, $\delta_1 + \delta_2 = \pi$, d'où
$$\text{Aire}(BCD) = \pi - (\beta_1 + \beta_2) - \gamma - (\pi - \beta_2 - \delta_2) = \pi - \beta_1 - \gamma - \delta_1.$$
3. Comme un triangle idéal a trois angles nuls, on déduit alors de la question précédente qu'un triangle hyperbolique idéal est toujours d'aire π.
4. On montre par récurrence que l'aire d'un polygone hyperbolique d'angles $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ est $(n-2)\pi - \alpha_1 - \ldots - \alpha_n$ en utilisant les questions précédentes.

Surfaces hyperboliques compactes

Exercice 3. *Domaines fondamentaux*

Une *surface hyperbolique* est un quotient $M = \Gamma\backslash\mathbb{H}^2$, pour un sous-groupe discret $\Gamma \subset \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$. Pour que M soit une variété, il faut que Γ ne contienne pas d'élément elliptique. Soit $M = \Gamma\backslash\mathbb{H}^2$ une telle surface. Un sous-ensemble $F \subset \mathbb{H}^2$ est un *domaine fondamental* pour l'action de Γ si

— $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} \gamma \cdot F = \mathbb{H}^2$,
— Pour tout $\gamma \neq \gamma' \in \Gamma$, $\gamma \cdot F \cap \gamma' \cdot F = \varnothing$.

1. Montrer que si F_1 et F_2 sont deux domaines fondamentaux pour Γ et si F_1 est d'aire finie, alors $\text{Aire}(F_1) = \text{Aire}(F_2)$. On dit que Γ est un *réseau* s'il possède un domaine fondamental d'aire finie.
2. Montrer que tout sous-groupe discret Γ de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ agit proprement discontinument, c'est-à-dire que pour tout $\gamma \in \Gamma$, tout $z \in \mathbb{H}^2$ et tout compact $K \subset \mathbb{H}^2$, $\{g \in \Gamma : gz \in K\}$ est fini.
3. Étant donné un sous-groupe discret Γ et $p \in \mathbb{H}^2$ qui n'est pas un point fixe de $\gamma \in \Gamma\setminus\{e\}$, on définit le *domaine fondamental de Dirichlet* par
$$D = D_p(\Gamma) = \{z \in \mathbb{H}^2 : d(z,p) < d(z,\gamma p),\ \forall \gamma \in \Gamma \setminus \{e\}\}.$$
   Montrer que D est bien un domaine fondamental.

Solution.

1. Soit μ la mesure d'aire hyperbolique sur $\mathbb{H}^2$, et soit F_1, F_2 deux domaines fondamentaux. On a

$$\mu(F_1) = \mu(F_1 \cup \mathbb{H}^2) = \mu(F_1 \cup \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \gamma \cdot F_2) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \mu(F_1 \cup \gamma \cdot F_2),$$

   où dans la dernière égalité on a utilisé le fait que les différents $\gamma \cdot F_2$ sont disjoints. Ensuite, on utilise le fait que l'aire hyperbolique est invariante par isométrie et que $\gamma \in \Gamma$ agit par isométrie :

$$\mu(F_1) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \mu(F_2 \cup \gamma^{-1} \cdot F_1) = \mu(F_2 \cup \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \gamma^{-1} \cdot F_1) = \mu(F_2).$$

2. On pose, pour tout $z \in \mathbb{H}^2$, $\phi_z : g \in \Gamma \mapsto g \cdot z$. Soit $K \subset \mathbb{H}^2$ un compact. Montrons que $\phi_z^{-1}(K)$ est un compact (cela signifie que ϕ_z est propre, et cela implique en particulier que l'action est propre et discontinue puisque Γ est discret). Sans perdre de généralité, on le montre pour ϕ_{i}, puisqu'on peut envoyer n'importe quel $z \in \mathbb{H}^2$ sur i par une isométrie. En utilisant la décomposition d'Iwasawa de $g \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ à l'aide de (x, y, θ) (cf. Exercice 1, question 1), on remarque que $g \cdot \mathrm{i} = x + \mathrm{i}y$, donc la préimage de K est homéomorphe à $K \times \mathrm{SO}(2)$ qui est bien un compact.
3. On a naturellement $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} \gamma \cdot D \subset \mathbb{H}^2$, donc pour montrer l'égalité il suffit de montrer l'inclusion réciproque. Soit $z \in \mathbb{H}^2$. Comme l'orbite Γz est discrète, il existe $z_0 \in \Gamma z$ tel que

$$d(z_0, z) \leq d(\gamma \cdot z, p) = d(z, \gamma^{-1} \cdot p), \quad \forall \gamma \in \Gamma.$$

   Ainsi, $z_0 \in D$, et donc $z \in \gamma^{-1}D$, ce qui conclut l'inclusion. Il reste à montrer la deuxième propriété des domaines fondamentaux : soit $\gamma \in \Gamma$ non trivial. Supposons qu'il existe $z_1, z_2 \in D$ tels que $z_1 = \gamma \cdot z_2$. Alors

$$d(z_1, p) < d(z_1, \gamma^{-1} \cdot p) = d(z_2, p),$$

   et

$$d(z_2, p) < d(z_2, \gamma \cdot p) = d(z_1, p),$$

   ce qui est impossible, donc pour tout $\gamma \neq 1$, $D \cap \gamma \cdot D = \varnothing$.

Exercice 4. *Formule de Gauss–Bonnet, le retour*

Soit M une surface hyperbolique compacte orientable de genre g. On se donne une triangulation de M, c'est-à-dire que l'on recouvre M par des triangles dont les intérieurs sont disjoints deux à deux. On admet qu'une triangulation peut toujours être choisie de sorte que les côtés des triangles soient géodésiques. En utilisant l'exercice 2, démontrer la formule générale de Gauss–Bonnet :

$$\mathrm{Aire}(M) = 4\pi(g-1). \tag{1}$$

On pourra utiliser la formule d'Euler suivante : si $G = (V, E, F)$ est un graphe plongé dans M de sorte que ses faces soient simplement connexes et que ses arêtes ne se rencontrent qu'à leurs extrémités, alors

$$|V| - |E| + |F| = \chi(M) = 2 - 2g.$$

Solution. On se donne une triangulation géodésique, qui forme un graphe $G = (V, E, F)$. On a d'après la formule d'Euler

$$|V| - |E| + |F| = 2 - 2g,$$

et $|F|$ est le nombre de triangles. D'un autre côté,

$$\mathrm{Aire}(M) = \pi|F| - \sum_{T \text{ triangle}} (\alpha_T + \beta_T + \gamma_T),$$

puisque chaque triangle T est d'aire $\pi - \alpha_T - \beta_T - \gamma_T$. Or,

$$\sum_T \alpha_T + \beta_T + \gamma_T = 2\pi|V|.$$

Finalement, comme G est une triangulation, chaque arête borde deux triangles, ce qui indique que $|E| = \frac{1}{2}|F|$. On obtient alors

$$\text{Aire}(M) = 2\pi(\frac{1}{2}|F| - |V|) = 4\pi(g-1),$$

comme annoncé.

Exercice 5. *Théorème de Budzinski–Curien–Petri*

Pour $g \geq 2$, on pose

$$D_g = \min\{\text{Diam}(X) : X \text{ surface fermée orientable hyperbolique de genre } g\}.$$

L'objectif est de démontrer le théorème de Budzinski–Curien–Petri :

$$\lim_{g\to\infty} \frac{D_g}{\log g} = 1. \tag{2}$$

Pour ce faire, on se donne pour tout a une surface T_a construite par recollement d'une infinité dénombrable de pantalons (sphères à trois trous) P_a dont les bords sont tous de longueur a, comme dans la figure 3 ci-dessous. On fixe un point de base $p_0 \in P_a$, et on crée un graphe en reliant toutes les copies de p_0 des pantalons adjacents (cf. fig. 3). Le point p_0 et ses copies forment ce que l'on appelle des *points médians.*

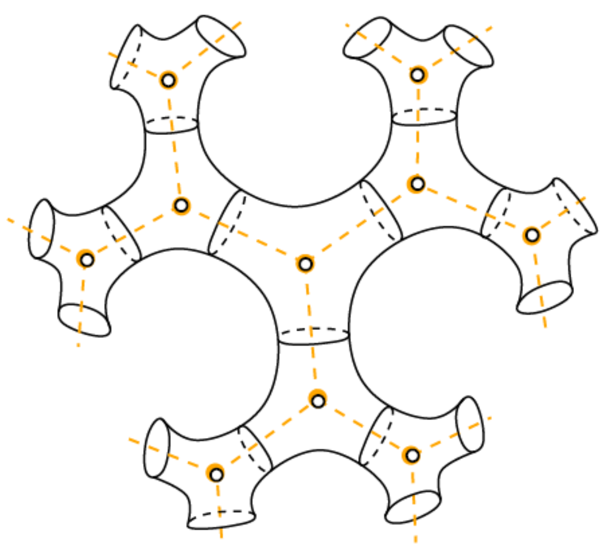

FIGURE 3 – La surface T_a

On définit

$$N_a(R) = \#\{\text{points médians à distance inférieure ou égale à } R \text{ d'un point de base } O \in T_a \text{ fixé}\}.$$

Étant donné un graphe 3-régulier $\mathcal{G}_n$ à $2n$ sommets, on associe à chaque sommet de $\mathcal{G}_n$ une copie de P_a, et on recolle entre elles les copies associées à des sommets adjacents, comme dans la figure 4.

On admet les deux résultats suivants.

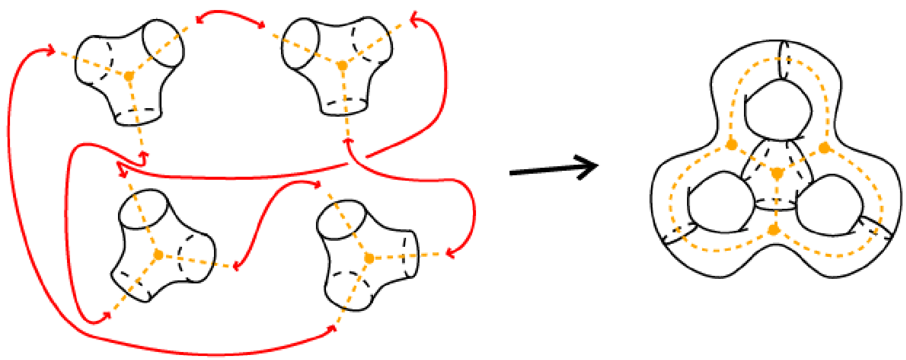

Figure 4 – Construction de la surface $S_{a,n}$

— pour tout $a \in (0, \infty)$, il existe des constantes C_a et δ_a dans $(0, 1)$ telles que

$$N_a(R) \sim C_a e^{\delta_a R}, \quad R \to \infty,$$

et $\delta_a \to 1$ quand $a \to \infty$.

— pour tout $\varepsilon > 0$, avec grande probabilité quand $n \to \infty$, on a

$$\mathrm{Diam}(S_{a,n}) \leq \left(\frac{1}{\delta_a} + \varepsilon \right) \log n.$$

À partir de ces résultats, démontrer le théorème. Indice : on pourra utiliser la "borne triviale" du cours, $\mathrm{Diam}(S) \geq \log \mathrm{Aire}(S) + O(1)$, vraie pour toute surface hyperbolique S.

Solution. Étant donné la borne triviale, on a déjà pour toute surface hyperbolique compacte de genre g

$$\mathrm{Diam}(S) \geq \log \mathrm{Aire}(S) + O(1) = \log(4\pi(g-1)),$$

donc on a, pour S de genre g qui minimise le diamètre,

$$\frac{D_g}{\log g} = \frac{\mathrm{Diam}(S)}{\log(g)} \geq \frac{\log(4\pi(g-1))}{\log g} + O\left(\frac{1}{g}\right) \to 1,$$

quand g tend vers l'infini. On peut alors conclure en montrant que

$$\limsup_{g \to \infty} \frac{D_g}{\log g} \leq 1 + \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Pour cela, on va montrer que

$$\frac{\mathrm{Diam}(S_{a,n})}{\log n} \leq 1 + \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0,$$

puisque $S_{a,n}$ est de genre n. On fixe alors $\varepsilon > 0$. D'après le premier point admis, on peut prendre $a \in (0, \infty)$ assez grand pour que $\frac{1}{\delta_a} \leq 1 + \varepsilon/2$. Alors, d'après le second point appliqué à $\varepsilon/2$, avec grande probabilité quand $n \to \infty$,

$$\mathrm{Diam}(S_{a,n}) \leq (1 + \varepsilon/2 + \varepsilon/2) \log n.$$

Cela conclut la preuve.